# TD 12 : Nombres réels Corrigé

## Supremum et infimum (pratique)

**1** ★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = \{x(1-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad B = \left\{e^{-\frac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad D = \{\arctan(e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\} \qquad F = \left\{n^{(-1)^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

**2** ★★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

- $A = \left\{\frac{1}{p-q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \neq q\right\}$
- $B = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $C = \left\{\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $D = \{p^4 - 6p^2q + 9q^2 \mid p,q \in \mathbb{R}\}$

## Supremum et infimum (théorique)

**3** ★★ Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{Z}$ qui est majorée.

1) Montrer que $A$ possède une borne supérieure, qu'on notera $M$.

On admet le théorème suivant :
*Si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente, alors elle est constante à partir d'un certain rang.*

2) En déduire que $A$ possède un maximum.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Justifier que $B$ possède un maximum. Que vaut $\max(B)$ ?

**4** ★★☆ Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ majorée. On note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$.

1) Justifier que $A$ n'admet pas de maximum.
2) Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intervalle $[M-\delta, M]$ contient une infinité d'éléments de $A$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $[M-\delta, M]$ contienne un nombre fini d'éléments de $A$. Ainsi, l'ensemble

$$B = A \cap [M-\delta, M]$$

ne possède qu'un nombre fini d'éléments. En particulier, $B$ possède un maximum : on pose $N = \max(B)$. On a en particulier $N \in B$, donc $N \in A$. Or, puisque $M \notin A$, on en déduit que $N \neq M$. Ainsi, on a $M - \delta \leq N < M$. On va obtenir une contradiction en montrant que $N$ majore $A$, ce qui est impossible car $M = \sup A$ est le plus petit des majorants. Soit $x \in A$.

- On suppose que $x < M - \delta$. Dans ce cas, on a bien $x \leq N$ car $M - \delta \leq N$.
- On suppose que $x \geq M - \delta$. Comme $M$ majore $A$, on a aussi $x \leq M$, donc $x \in A \cap [M-\delta, M]$, i.e. $x \in B$. Puisque $N = \max(B)$, on a donc $x \leq N$.

Dans tous les cas, on a donc $x \leq N$, donc $N$ majore $A$. Contradiction. Ainsi, l'ensemble $[M-\delta, M]$ contient une infinité d'éléments de $A$.

**5** ★★★ Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides bornées.

1) On définit l'ensemble

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Montrer que $A + B$ est majoré et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

2) On définit l'ensemble

$$|A| := \{|a| \mid a \in A\}$$

Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup |A|$ en fonction des supremum et/ou infimum de $A$ .

## Ensembles usuels, densité

**6** ★★ (*Nombres rationnels*)
Rappel : si $x$ et $y$ sont rationnels, alors $x+y$, $x-y$, $xy$ et $x/y$ (si $y$ est non nul) sont aussi rationnels.

1) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

2) Montrer que les nombres $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sont irrationnels.
*On peut utiliser le résultat suivant : si $n$ ne s'écrit pas comme le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.*

On pose $r=\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Supposons par l'absurde que $r$ est rationnel. On a $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{6}-r$ donc

$$2+3+2\sqrt{6}=6-r^2-2r\sqrt{6}$$

d'où $(2+2r)\sqrt{6}=1-r^2$. On montre que $r \neq -1$ donc $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Contradiction.

**7** ★★ Pour tout réel $x$, et entier naturel $n$, on pose $r_n=\dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$.

2) En déduire que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**8** ★★★ Montrer que les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$ :

$$X=\left\{\sqrt[3]{r} \mid r \in \mathbb{Q}\right\} \qquad Y=\left\{\frac{a}{2^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

**9** ★★★ **(nécessite d'avoir fait maths expertes)**
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si $k$ peut s'écrire $2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

1) Traiter le sens indirect.

2) Montrer que si $k$ est un multiple de 3, alors $\dfrac{1}{k} \notin \mathbb{D}$.

3) Traiter le sens direct en raisonnant par contraposée.